

Συσχέτιση ιδιομορφών Stokes και Parkovich–Neuber για ροή Stokes σε σφαιρικές συντεταγμένες

Χρήστος Γεωργαντόπουλος, Παναγιώτης Βαφέας

Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 26504 Πάτρα, Ελλάδα

Χρήστος Γιαννόπουλος

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 26504 Πάτρα, Ελλάδα

Θεματική Περιοχή: *Φαινόμενα Μεταφοράς (Ροή Ρευστών)*

Η ροή κατά Stokes (1851) για τη μόνιμη, μη-αξονοσυμμετρική κίνηση ενός ιξώδους, ασυμπίεστου ρευστού σε πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds (έρπουσα ροή), μέσα σε απλώς συνεκτικά και φραγμένα πεδία ροής, περιγράφεται από ένα ζεύγος μερικών διαφορικών εξισώσεων που συνδέουν τη διαρμονική ταχύτητα (αρμονικός ο στροβιλισμός) με το αρμονικό πεδίο ολικής πίεσης. Η μεν μία εξίσωση (εξίσωση της ορμής) προκύπτει από τις γενικές μορφές Navier–Stokes για χαμηλούς αριθμούς Reynolds και δηλώνει ότι η παραγόμενη πίεση αντιτίθεται στις ιξώδεις δυνάμεις, η δε άλλη (εξίσωση της συνέχειας) διασφαλίζει την ασυμπιεστότητα του ρευστού.

Οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν συστήματα ροής γύρω από σωματίδια τα οποία, ως πρώτη προσέγγιση, θεωρούνται σφαιρικά λόγω κυρίως του μικρού τους μεγέθους και τότε η αντιμετώπιση του τύπου αυτού της ροής σαν ροή Stokes είναι επαρκώς δικαιολογημένη.

Έχουν προταθεί αρκετές αναπαραστάσεις των λύσεων για την ταχύτητα και την πίεση για τη ροή Stokes σε τρισδιάστατα χωρία, οι οποίες εμφανίζονται με τη μορφή διαφορικών τελεστών που δρουν σε αρμονικά και διαρμονικά δυναμικά. Από την άλλη μεριά, η ανάπτυξη της θεωρίας του Stokes για διδιάστατες ροές, πλεονεκτεί στο ότι απαιτεί μόνο μία συνάρτηση δυναμικού (συνάρτηση ροής) για την εύρεση των πεδίων ροής, μειονεκτεί όμως στο ότι αφορά αξονοσυμμετρικές ροές.

Βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η συσχέτιση των πεδίων ροής (ταχύτητα και πίεση) που προκύπτουν από τις διαφορικές αναπαραστάσεις (3D), θεωρώντας αξονοσυμμετρία, με τα αντίστοιχα πεδία της θεωρίας Stokes (2D), αναζητώντας τα αντίστοιχα ισοδύναμα δυναμικά. Σε πρώτη φάση γίνεται η χρήση της γενικής διαφορικής αναπαράστασης Parkovich–Neuber. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων σύμφωνα με την οποία, η συνάρτηση ροής εκφράζεται μέσω ενός πλήρους αναπτύγματος διαχωριζομένων ιδιομορφών σε όρους συναρτήσεων Gegenbauer, κατασκευάζουμε αρχικά τα πεδία ροής που γεννούν οι συγκεκριμένες ιδιοσυναρτήσεις μέσω της θεωρίας του Stokes. Στην συνέχεια αντιμετωπίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα του καθορισμού εκείνων των σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, οι οποίες μέσω της αναπαράστασης Parkovich–Neuber γεννούν ακριβώς τα ίδια πεδία ροής. Η συσχέτιση επιτυγχάνεται μέσω σχέσεων που συνδέουν τις αντίστοιχες σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις.

Αποδεικνύουμε ότι η διαδικασία αντιστοίχισης είναι αντιστρέψιμη, εφόσον η παραπάνω φόρμουλα συσχετίζει με μοναδικό και αμφιμονοσήμαντο τρόπο κάθε δυναμικό της αναπαράστασης Parkovich–Neuber με έναν συγκεκριμένο συνδυασμό ιδιοσυναρτήσεων της θεωρίας Stokes. Τα αποτελέσματα δίνονται σε κλειστή και εύχρηστη αναλυτική μορφή, ενώ ως μελλοντική δουλειά μπορεί να γίνει και χρήση εναλλακτικών διαφορικών αναπαραστάσεων.